MPSI

DS de mathématiques n°4

29 nov. 2025

Intégrales, ED, nombres réels, suites

Durée : **4h**. Calculatrices non autorisées.
La clarté de la copie pourra faire varier la note de ± 1 point.

1 Pour s'échauffer

Les questions principales de cet exercice (i.e. ***1)***, ***2)****, etc.) sont indépendantes.*

1) **a)** Mettre $1+i$ sous forme exponentielle puis résoudre l'équation $z^2 = 1+i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, en exprimant les solutions sous forme exponentielle.

b) Résoudre à nouveau l'équation $z^2 = 1+i$ par une autre méthode, qui permet d'exprimer les solutions sous forme algébrique.

c) En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

2) Déterminer les fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui vérifient :

$$y'' - 4y' + 4y = 1 + e^{2ix}$$

3) Soit $a > 0$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général

$$u_n = (1+a) \times (1+a^2) \times \ldots \times (1+a^n)$$

a) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Montrer que si $a \geq 1$, alors $u_n \geq 2^n$. En déduire la limite de (u_n).

c) Montrer que pour tout réel x, on a $1 + x \leq e^x$.

d) On suppose $0 < a < 1$. En utilisant la question précédente, montrer que la suite (u_n) converge.

2 Une équation d'ordre 2 à coefficients non constants

On cherche les solutions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(E) : \quad (x^2+1)y'' - 2y = 0$$

1) **a)** Déterminer une primitive de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

On pourra remarquer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{t^2}{(1+t^2)^2} = \dfrac{t}{2} \times \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$.

b) En déduire une primitive de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(t) = \frac{1}{(1+t^2)^2}$$

2) Déterminer *une* solution de (E) sous la forme d'un polynôme de degré 2 (non nul), que l'on notera y_0.

3) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On pose $Y : x \mapsto \dfrac{y(x)}{y_0(x)}$. En écrivant $y = y_0 Y$ et en posant $z = Y'$, montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle

$$(E') : \quad z' + \frac{4x}{x^2+1} z = 0$$

4) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

3 Suites Djadjacentes

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+c_n}{2}}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

On considère les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par les relations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_0 = 2 \qquad S_n = \frac{S_{n-1}}{c_n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{S_n}{c_n}$$

2) Montrer que (S_n) et (T_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2^{n+1} \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

4) En utilisant le fait (admis) que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, en déduire la limite de (S_n).

4 Densité de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbb{R}$

On note D l'ensemble des nombres réels de la forme $p + q\sqrt{2}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ (cet ensemble se note aussi $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mais on le notera D dorénavant). L'objectif de cet exercice est de montrer que D est dense dans $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tous $x, y \in D$, les nombres $x + y$, $x - y$ et xy sont éléments de D.

2) Soit $u = \sqrt{2} - 1$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u^n \in D$.

3) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u^N < b - a$.

4) Montrer que l'ensemble $X = \left\{k \in \mathbb{Z} \;\middle|\; a < ku^N\right\}$ admet un plus petit élément, qu'on notera m.

5) Montrer que $a < mu^N < b$.

6) Conclure.

5 Une primitive prohibitive

Soit $f : x \mapsto \ln x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f^n la fonction $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$, avec la convention $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_+^*}$.

Déterminer une primitive de la fonction

$$g : x \mapsto \frac{1}{f^0(x) f^1(x) \ldots f^n(x)}$$

Le nombre soixante-douze a la propriété de s'écrire soixante en base douze... Saurez-vous trouver d'autres nombres qui vérifient cette propriété, en français ou dans d'autres langues ?